

DOI: 10.7652/xjtuxb201803011

利用共形几何代数的平面并联机构 位置正解求解方法

黄昔光, 黄旭

(北方工业大学机械与材料工程学院, 100144, 北京)

摘要: 提出了一种基于共形几何代数(CGA)求解所有 1 140 种由转动副和移动副任意组合而成的平面并联机构的位置正解解析法。应用组合数学理论阐明了由转动副和移动副组成的平面并联机构共有 1 140 种类型;根据各支链的长度约束条件,建立了涵盖 1 140 种平面并联机构类型的等效机构模型;应用共形几何代数框架下的刚体平移和旋转运动表示,建立了等效机构模型的位置正解数学模型,只需通过简单的线性消元,即可推导出该位置正解问题的符号形式一元六次输入输出方程,从而可快速获得该问题的全部解析解,无增根也无漏根。基于计算机代数计算系统 Maple16 进行编程,通过 2 个数字实例验证了方法的正确性和有效性。

关键词: 共形几何代数;平面并联机构;位置正解;解析解

中图分类号: TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)03-0076-07

Direct Kinematics of Planar Parallel Mechanisms Based on Conformal Geometric Algebra

HUANG Xiguang, HUANG Xu

(School of Mechanical and Materials Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

Abstract: A novel algorithm is proposed to solve the direct kinematics problem of arbitrary planar three-legged parallel mechanism composed of revolute joints R and prismatic joints P based on conformal geometric algebra (CGA). It is proved that there exist 1 140 possible forms of planar three-legged parallel mechanisms composed of revolute joints R and prismatic joints P by using combinatorics, and the equivalent mechanism model covering all these 1 140 forms is presented in terms of the constraints of each leg length. The mathematical model of the equivalent mechanism is built by using the expressions of rotation and translation under the CGA framework. Using the simple linear elimination, the symbolic input-output equation with 6th degree can be deduced from the mathematical model and all solutions can be obtained. Two numerical examples are given to demonstrate the efficiency of the algorithm based on Maple16. The results show that this algorithm can simplify the computation and is suitable for computer programming.

Keywords: conformal geometric algebra; planar parallel mechanism; direct kinematics; analytical solution

并联机构是由至少 2 个独立的运动链将动平台 和静平台连接而成、具有 2 个或 2 个以上自由度的

一种闭环机构。并联机构由于具有输出精度高、结构刚性好、承载能力强、便于控制等优点,已成为目前机构学研究的重要内容^[1]。具有3个自由度的平面并联机构在机器人操作机构、数控精密绣花机、数控线切割机、数控电火花机床以及精密微动机构等方面有着广泛的应用^[2-5]。

并联机构位置正解就是根据运动链的杆长来推算动平台相对静平台的位置和姿态,该问题是并联机构控制、工作空间、奇异位置、校对零位置等问题的研究基础。并联机构位置正解一般归结为多元高次非线性方程组求解问题,目前求解并联机构位置正解的方法主要有数值法和代数消元法。数值法求解相对简单,容易实现算法的编程,得到一系列离散数值解,对尚未得到解析解的机构学问题具有重要意义,已广泛应用于工程界,但其主要不足在于依赖初值的选取,通常很难得到全部解,并且不能含有变量或参数,无法给出明确的函数表达式。代数消元法能给出明确的函数表达式,可以直观地反映输出变量与各参数之间的函数关系,尤其是推导出的一元高次输入输出方程具有很高的理论价值,不仅可获得问题的全部解,而且可以进行后续工作空间、奇异位置等运动学问题的研究。如何获得全部解析解以及实时求解,是目前并联机构位置正解研究的重点与难点。1983年,Hunt从几何的角度首次证明了平面并联机构最多具有6组解^[3];Peysah首次获得了该问题的一元六次输入输出方程^[4]。随后,各国学者采用不同的数学方法获得了该机构的相同输入输出方程^[2,5-8]。最近,倪振松等求解了平面3-RPR并联机构位置正解,但存在10个增根^[9];张忠海等通过提取3类公因式,将一元十次方程降为六次,但消元求解复杂^[10]。尽管文献[9-10]引入了共形几何代数进行数学建模,但需要进行多元非线性方程组代数消元求解,存在消元求解技巧性强、过程复杂等问题。因此,降低并联机构位置正解封闭方程的非线性、快速给出全部解析解、实现该问题的数学机械化求解,具有重要的理论价值和工程意义。

本文首先应用组合数学理论阐明了由转动副R和移动副P组成的平面并联机构共有1 140种类型,并建立了所有这1 140种平面并联机构类型的等效机构模型;然后,根据平面并联机构各支路之间为几何尺度约束关系,建立了在共形几何代数框架下平面并联机构位置正解的数学模型。求解过程没有以往文献中的非线性消元求解,只需简单的线性消元即可推导出该问题符号形式的一元六次输入输

出方程,并获得了该问题的全部解析解,求解过程简捷明了,非线性度低,实现了该问题的数学机械化求解。

1 共形几何代数基础

几何代数是内容十分丰富的分层代数系统,它为经典几何提供了统一的代数框架,是强有力的符号计算工具^[11-13]。共形几何代数(CGA)将 n 维欧氏空间 R^n 嵌入到 $(n+2)$ 维闵氏空间 $R^{n+1,1}$ 中。设有一组正交矢量基 $\{e_1, \dots, e_n, e_+, e_-\}$,满足

$$\left. \begin{aligned} e_i^2 &= 1, \\ e_{\pm}^2 &= \pm 1, \\ e_i \cdot e_+ &= e_i \cdot e_- = e_+ \cdot e_- = 0, \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n \quad (1)$$

引入2个向量 e_0 和 e_{∞}

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+); \quad e_{\infty} = e_- + e_+ \quad (2)$$

则有

$$e_0^2 = e_{\infty}^2 = 0; \quad e_{\infty} \cdot e_0 = -1 \quad (3)$$

式中: e_0 表示原点; e_{∞} 表示无穷远点。与三维欧氏空间相比,CGA增加了二维空间,即包含3个基矢量 $e_i (i=1, 2, 3)$ 。共形几何代数中点 S 可以写成

$$S = s + s^2 e_{\infty} / 2 + e_0 \quad (4)$$

式中: $s = s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3$,其中 s_1, s_2, s_3 为三维欧氏空间点的坐标。

假设 P, S 表示CGA的2个点,则点 P 与 S 的内积表示为

$$P \cdot S = (p + p^2 e_{\infty} / 2 + e_0) \cdot (s + s^2 e_{\infty} / 2 + e_0) = p \cdot s - (s^2 + p^2) / 2 = -(s - p)^2 / 2 \quad (5)$$

由式(5)得2个点 P, S 的内积与距离的关系为

$$P \cdot S = -(s - p)^2 / 2 \quad (6)$$

空间刚体运动变换主要包括旋转和平移。在CGA中,旋转算子的旋量可表示为

$$R = \cos(\theta/2) - L \sin(\theta/2) = e^{-\theta L/2} \quad (7)$$

式中: L 表示转轴; θ 表示旋转角度。

旋转算子 R 的共轭

$$\tilde{R} = \cos(\theta/2) + L \sin(\theta/2) = e^{\theta L/2} \quad (8)$$

平移算子的旋量表示为

$$T = 1 + t e_{\infty} / 2 = e^{-t e_{\infty} / 2} \quad (9)$$

式中: $t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$ 为平移向量,表示平移的方向和长度。

平移算子的共轭

$$\tilde{T} = e^{t e_{\infty} / 2} \quad (10)$$

共形几何代数中旋转和平移的复合在旋量表示下是简单的几何积,所以刚体运动的运动算子

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{T} \quad (11)$$

在共形几何代数中,任意几何体 $\mathbf{o}$ 的刚体运动变换都可以借助几何积来实现,即

$$\mathbf{o}_{\text{rigid_motion}} = \mathbf{M}\mathbf{o}\widetilde{\mathbf{M}} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{o}_{\text{rigid_motion}}$ 为几何体 $\mathbf{o}$ 变换后的几何体; $\mathbf{M}$ 为规范化的运动变换算子; $\widetilde{\mathbf{M}}$ 为 $\mathbf{M}$ 的共轭。式(12)适用于 CGA 中所有几何体的空间运动变换。

2 平面并联机构位置正解

2.1 平面并联机构等效模型

如图 1 所示,平面并联机构的动平台 $P_4P_5P_6$ 分别通过 3 条独立的运动链 P_1P_4 、 P_2P_5 和 P_3P_6 与静平台 $P_1P_2P_3$ 相连,每条运动链包含 3 个单自由度的运动副,其中只有 1 个主动副(即装有驱动器的运动副,该运动副加下划线表示),其余为从动副。通过控制 3 条支链的主动副驱动器参数,可实现动平台相对静平台在平面内的任意位置和姿态。

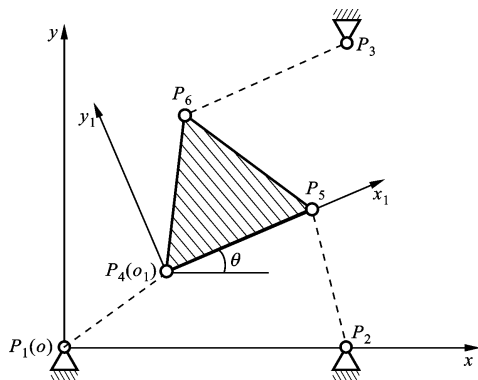


图 1 平面并联机构等效模型

为分析方便,研究对象只限于由转动副 R 和移动副 P 两种平面低副组成的平面并联机构(其他运动副可以通过相关机构学理论转化为 R 和 P)。根据组合数学理论,由 3 个单自由度运动副(R 或 P)组成平面并联机构运动支链类型的数量有 $2^3 = 8$ 种,即 RRR、RPR、RRP、RPP、PRR、PPR、PRP 和 PPP。由于纯移动副组成的 PPP 运动支链不可能产生动平台姿态的变化,平面并联机构中不能包含 PPP 运动支链,因此,平面并联机构的运动支链只有前 7 种类型。由 7 种类型构成的对称型平面并联机构如图 2 所示。运动链运动副符号位置从左往右,表示运动副从静平台往静平台分布,例如图 1b 的 RPR,表示最左边的 R 连接静平台,最右边的 R 连接动平台,中间的 P 则连接 2 个 R。

由于并联机构 3 条运动支链主动副的位置不同,由转动副 R 和移动副 P 组成的运动支链有多少

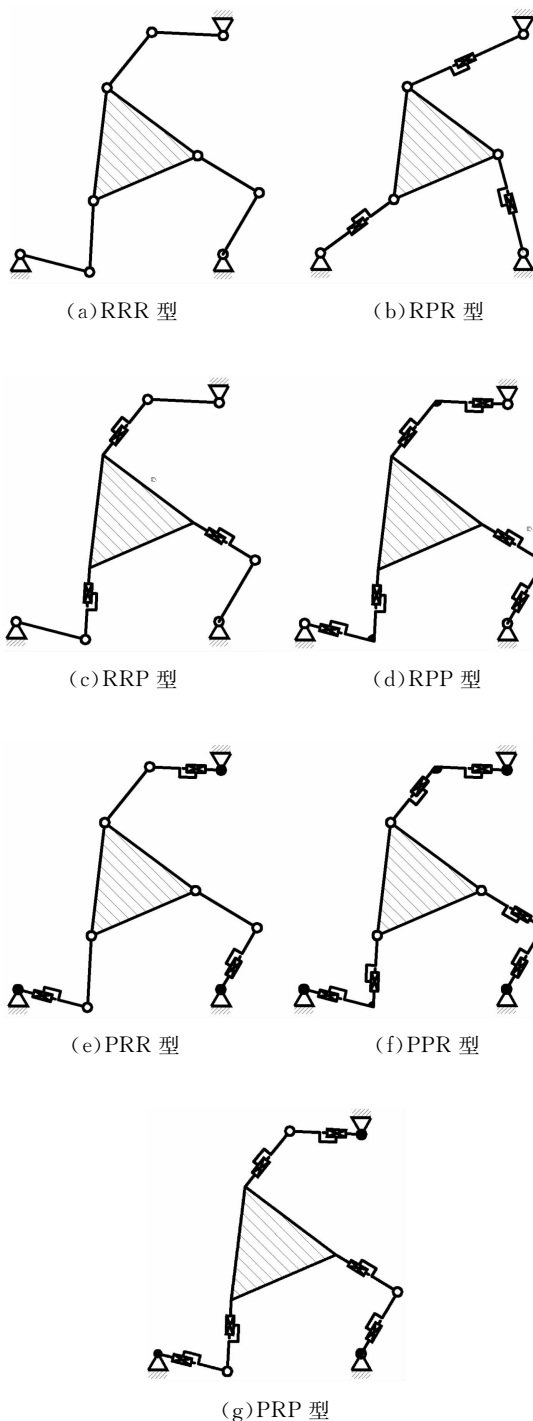


图 2 由 7 种运动支链构成的对称型平面并联机构

种类型? 对于平面并联机构中的任一条支链,如果主动副的驱动器参数给定,则其他 2 个从动副组成的被动支链类型将有 RR、PR、RP 和 PP 共 4 种。由于主动副驱动器参数是确定的,含有 PP 型被动支链的平面并联机构将不可控或不能装配^[14],故被动支链类型中不能有 PP 型。根据所有被动支链的结构类型,可知平面并联机构中的运动支链有 18 种类型,如表 1 所示。

表 1 平面并联机构的 18 种运动支链类型

RR 型	PR 型	RP 型
<u>RRR</u>	<u>RPR</u>	<u>RRP</u>
<u>RRR</u>	<u>PRR</u>	<u>RPR</u>
<u>RRR</u>	<u>PRR</u>	<u>RPR</u>
<u>PRR</u>	<u>PPR</u>	<u>PRP</u>
<u>RPR</u>	<u>PPR</u>	<u>RPP</u>
<u>RRP</u>	<u>PRP</u>	<u>RPP</u>

由上述分析可知,平面并联机构有 $m=3$ 条运动支链,且只能从表 1 所示的 $n=18$ 种类型中选取。由组合数学理论有

$$C(n,m)=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}=C(18,3)=1\,140$$

(13)

即考虑主动副的分布,由 R 和 P 组成的平面并联机构最多有 1 140 种类型。

对于所有 1 140 种平面并联机构类型中的任一机构,无论其运动支链属于哪种类型,如果所有运动支链主动副的驱动器参数全部确定,则动平台到静平台的运动链距离是确定的,即动平台相对静平台的位置和姿态可以通过位置正解确定。因此,根据各支链的长度约束条件,可建立涵盖所有 1 140 种平面并联机构的等效机构模型,如图 1 所示。图中的虚线表示主动副驱动器参数固定后连接动平台和静平台的等效运动支链,其长度为运动链的实际长度。

因此,如果算法能求出图 1 所示平面并联机构等效模型的位置正解解析解,则该算法能求出由 R 和 P 构成的所有 1 140 种类型平面并联机构的位置正解解析解。下面,将针对图 1 所示的平面并联机构等效模型的位置正解进行求解。

2.2 数学建模

建立图 1 所示的坐标系,取静平台铰链 P_1 为静坐标系 xoy 的原点, $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向为 x 轴,3 个固定铰链的中心坐标分别为 $P_1(0,0)$ 、 $P_2(p_{2x},0)$ 和 $P_3(p_{3x},p_{3y})$;取动平台铰链 P_4 作为动坐标系 $x_1o_1y_1$ 的原点, $\overrightarrow{P_4P_5}$ 方向为动坐标系 x_1 轴,动平台的铰链在动坐标系 $x_1o_1y_1$ 中的坐标为 $P_4(0,0)$ 、 $P_5(p_{5x},0)$ 和 $P_6(p_{6x},p_{6y})$ 。设铰链 P_4 在静坐标系 xoy 中的坐标为 (p_x,p_y) ,动坐标系 $x_1o_1y_1$ 相对于固定坐标系 xoy 的姿态转角为 θ 。平面并联机构位置正解就是已知 3 条等效支链的杆长 q_1,q_2,q_3 ,求点 P_4 在固定坐标系中的坐标 (p_x,p_y) 及姿态转角 θ 。

由图 1 可知,静坐标系到动坐标系的运动变换可看作静坐标系沿 x 轴平移 p_x ,沿 y 轴平移 p_y ,再绕 z 轴旋转 θ ,用共形几何代数表示为

$$T_x=1-\frac{p_x}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\infty$$

(14)

$$T_y=1-\frac{p_y}{2}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_\infty$$

(15)

$$R_z=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(16)

由式(11)得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}&=\mathbf{T}_x\mathbf{T}_y\mathbf{R}_z= \\ &\cos\frac{\theta}{2}-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\sin\frac{\theta}{2}-\left(\frac{p_x}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\frac{p_y}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_\infty- \\ &\left(\frac{p_y}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{p_x}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_\infty \end{aligned}$$

(17)

由式(12)可得动平台的 3 个铰链中心点 $P_i(i=4,5,6)$ 在静坐标系 xoy 的坐标为

$$\mathbf{p}'_i=\mathbf{M}\mathbf{p}_i\widetilde{\mathbf{M}}$$

(18)

式中: $\mathbf{p}_i(i=4,5,6)$ 为点 P_i 根据式(4)改写的 CGA 表达式; $\mathbf{p}'_i(i=1,2,\cdots,6)$ 为点 P_i 运动变换后获得的 CGA 表达式。

根据杆长约束条件,由式(6)可得

$$\left. \begin{aligned} -2(\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{p}'_4)&=q_1^2 \\ -2(\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{p}'_5)&=q_2^2 \\ -2(\mathbf{p}'_3\cdot\mathbf{p}'_6)&=q_3^2 \end{aligned} \right\}$$

(19)

将各点的坐标代入式(19),展开得

$$p_x^2+p_y^2=q_1^2$$

(20)

$$p_x^2+p_y^2+p_{2x}^2+p_{5x}^2-2(p_{2x}p_{5x}-p_xp_{5x})\cos\theta+2p_{5x}p_y\sin\theta-2p_xp_{2x}=q_2^2$$

(21)

$$p_x^2+p_y^2+p_{3x}^2+p_{3y}^2+p_{6x}^2+p_{6y}^2+2(p_y p_{6y}+p_x p_{6x}-p_{3x} p_{6x}-p_{3y} p_{6y})\cos\theta+2(p_y p_{6x}-p_{3y} p_{6x}-p_x p_{6y}+p_{3x} p_{6y})\sin\theta-2p_y p_{3y}-2p_x p_{3x}=q_3^2$$

(22)

式(20)~(22)为平面并联机构等效模型的位置正解封闭方程组,其中变量 p_x,p_y,θ 为待求量,其余变量为已知结构参数。

2.3 方程组求解

将式(20)代入式(21)和(22),得到关于 p_x,p_y 的二元一次方程组

$$Ap_x+Bp_y+D=0$$

(23)

$$Ep_x+Fp_y+G=0$$

(24)

式中

$$A=2p_{5x}\cos\theta-2p_{2x}$$

$$B=2p_{5x}\sin\theta$$

$$D=q_1^2-q_2^2+p_{2x}^2+p_{5x}^2-2p_{2x}p_{5x}\cos\theta$$

$$E=2p_{6x}\cos\theta-2p_{6y}\sin\theta-2p_{3x}$$

$$F=2p_{6y}\cos\theta-2p_{6x}\sin\theta-2p_{3y}$$

$$G = q_1^2 - q_3^2 + p_{3x}^2 + p_{3y}^2 + p_{6x}^2 + p_{6y}^2 - 2(p_{3x}p_{6x} + p_{3y}p_{6y})\cos\theta + 2(p_{3x}p_{6y} - p_{3y}p_{6x})\sin\theta$$

由式(23)、(24),得 p_x 、 p_y 关于 θ 的表达式

$$p_x = \frac{BG - DF}{AF - BE}; \quad p_y = \frac{DE - AG}{AF - BE} \quad (25)$$

若式(25)中的分母 $AF - BE \neq 0$ (否则该机构为退化构型,将另文探讨),将式(25)代入式(20),得

$$r_1 \cos^3 \theta + r_2 \sin \theta \cos^2 \theta + r_3 \cos^2 \theta + r_4 \sin \theta \cos \theta + r_5 \cos \theta + r_6 \sin \theta + r_7 = 0 \quad (26)$$

式中: $r_1 \sim r_7$ 为与机构参数有关的常数,其符号表达式见附录 A。

令 $t = \tan \theta / 2$, 则 $\cos \theta = (1 - t^2) / (1 + t^2)$, $\sin \theta = 2t / (1 + t^2)$, 代入式(26)可得关于 t 的一元六次方程

$$\omega_6 t^6 + \omega_5 t^5 + \omega_4 t^4 + \omega_3 t^3 + \omega_2 t^2 + \omega_1 t + \omega_0 = 0 \quad (27)$$

式中

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(r_2 + r_4 + r_6) \\ \omega_2 &= -3r_1 - r_3 + r_5 + 3r_7; \quad \omega_3 = 4(-r_2 + r_6) \\ \omega_4 &= 3r_1 + r_3 - r_5 + 3r_7; \quad \omega_5 = 2(r_2 - r_4 + r_6) \\ \omega_6 &= -r_1 + r_3 - r_5 + r_7; \quad \omega_0 = r_1 + r_3 + r_5 + r_7 \end{aligned}$$

式(27)为推导出的平面并联机构的符号形式输入输出方程,即式(27)的系数 $\omega_i (i=1 \sim 6)$ 全部为机构结构参数的符号表达。求解式(27)时,由于计算机硬件的限制,需将已知参数的数值代入系数 ω_i 进行求解,可求出关于变量 t 的 6 组解,根据 $\theta = 2 \arctan t$ 可求得相应的 6 组 θ 值。然后,将 θ 代入式(25)可得 p_x 和 p_y 的值,从而可获得平面并联机构的全部位置正解解析解,无增根也无漏根。值得注意的是,将 $\theta = \pm \pi$ 代入式(26)中,若 $\omega_6 = 0$, 则 $\theta = \pm \pi$ 也是式(26)的可行根。

上述推导过程全部为符号计算,不需要经典机构运动学理论中的欧拉旋转角和矩阵运算,亦无需复杂的多元高次非线性方程组消元技巧,只需简单的线性消元即可推导出平面并联机构位置正解符号形式的一元六次输入输出方程。对于任意 1 140 种平面并联机构类型的位置正解,只要将其等效模型的结构参数直接代入式(27),通过求解式(27)和(25),即可快速获得相应平面并联机构位置正解的所有解析解,求解过程简捷,易于编程实现。

3 数字验证

本文方法可通过科学计算软件 Maple16 编程实现。为验证方法的正确性和有效性,针对图 2b 所示的 RPR 型平面并联机构,应用本文算法对文献[2,9-10]中的 2 组实例进行数字验证。

3.1 数字实例 1

以文献[2]中的机构结构参数为例进行验证。将文献[2]中的结构参数换算成本文等效机构模型的结构参数: $q_1 = 46, q_2 = 48, q_3 = 40, p_{2x} = 44, p_{2y} = p_{3x} = p_{5y} = 0, p_{3y} = 30, p_{5x} = 52, p_{6x} = 42, p_{6y} = 40$ 。将结构参数直接代入式(27)和式(25),可快速获得该并联机构位置正解的全部 6 组解析解。计算结果如表 2 所示,与文献[2]获得的结果相同。将 6 组解分别代入原方程(20)~(22)的左边,等式成立,说明计算正确。

表 2 数字实例 1 的 6 组解

序号	$\theta / (^{\circ})$	p_x	p_y
1	14.721 5	-1.287 0	29.638 7
2	50.707 9	-9.022 7	3.398 3
3	57.810 1	67.982 3	29.549 6
4	140.344 5	13.476 9	22.654 0
5	-6.797 4	16.629 5	43.535 7
6	-80.638 4	-5.129 6	2.977 0

3.2 数字实例 2

以文献[9]或[10]中的机构结构参数为例进行验证。将文献[9]或[10]中的结构参数换算成本文等效机构模型的结构参数: $q_1 = 5, q_2 = 4, q_3 = 4, p_{2x} = 6, p_{2y} = p_{3x} = p_{5y} = 0, p_{3x} = 5, p_{3y} = 11, p_{5x} = 6, p_{6x} = 4 \times \cos 45^{\circ} = 2.828\ 4, p_{6y} = 4 \times \sin 45^{\circ} = 2.828\ 4$ 。将结构参数直接代入式(27)和式(25),可快速获得该并联机构位置正解的全部 6 组解析解。计算结果如表 3 所示,与文献[9]或[10]获得的结果相同。将 6 组解分别代入原方程(20)~(22)的左边,等式成立,说明计算正确。

表 3 数字实例 2 的 6 组解

序号	$\theta / (^{\circ})$	p_x	p_y
1	-9.573 4	0.184 1	4.996 6
2	-9.977 8	1.693 3	4.704 5
3	43.579 6+ 53.619 6i	4.941 3- 0.027 1i	-0.783 3- 0.171i
4	43.579 6- 53.619 6i	4.941 3+ 0.027 1i	-0.783 3+ 0.171i
5	-56.326 7+ 48.042 3i	-2.729- 4.756 9i	6.634- 1.956 8i
6	-56.326 7- 48.042 3i	-2.729+ 4.756 9i	6.634+ 1.956 8i

4 结 论

(1)本文阐明了由转动副 R 和移动副 P 任意组

合而成的平面并联机构共有 1 140 种类型,根据各支链的长度约束条件,提出了涵盖这 1 140 种平面并联机构类型的等效机构模型。

(2)基于共形几何代数提出的求解所有 1 140 种平面并联机构位置正解的解析方法,避免了以往文献中烦琐的欧拉旋转角和矩阵运算,以及多元高次非线性方程组的复杂求解,只需简单线性消元即可推导出该问题的符号形式一元六次输入输出方程,并可快速获得该问题的全部解析解,无增根也无漏根。

(3)推导出的符号形式输入输出方程可直接用于平面并联机构的位置正解输出变量的求解,使得求解过程十分简单,不需要重复公式推导以及人工参与消元,适合计算机编程,实现了该问题的数学机械化求解。

(4)通过 2 个数字实例验证了本文方法的正确性和有效性。该方法可为平面并联机构后续的构型退化条件、奇异性研究提供理论基础。

参考文献:

- [1] 文福安,梁崇高,廖启征. 并联机器人机构位置正解[J]. 中国机械工程, 1999, 10(9): 1011-1013.
WEN Fuan, LIANG Chonggao, LIAO Qizheng. The forward displacement analysis of parallel robotic mechanisms [J]. China Mechanical Engineering, 1999, 10(9): 1011-1013.
- [2] 刘惠林,张同庄,丁洪生. 3-RPR 平面并联机构正解的吴方法[J]. 北京理工大学学报, 2000, 20(5): 565-569.
LIU Huilin, ZHANG Tongzhuang, DING Hongsheng. Forward solutions of the 3-RPR planar parallel mechanism with Wu's method [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2000, 20(5): 565-569.
- [3] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms [J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105(4): 705-712.
- [4] PEISACH E E. Determination of the position of the member of three-joint and two-joint four member Assur groups with rotational pairs [J]. Machinowedenie, 1985(5): 56-61.
- [5] PENNOCK G R, KASSNER D J. Kinematic analysis of a planar eight-bar linkage: application to a platform-type robot [J]. Journal of Mechanical Design, 1992, 114(1): 87-95
- [6] KONG X, GOSSELIN C. Forward displacement anal-

- ysis of third-class analytic 3-RPR planar parallel manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 39(9): 1009-1018.
- [7] HAYES M, ZSOMBOR-MURRAY P, CHEN C. Unified kinematic analysis of general planar parallel manipulators [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126(5): 866-874.
- [8] 韩林,张昱,梁崇高. 吴方法在平面并联机构位置正解中的应用[J]. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(1): 116-119.
HAN Lin, ZHANG Yu, LIANG Chonggao. Wu method for forward displacement analysis of the planar parallel mechanisms [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1998, 24(1): 116-119.
- [9] 倪振松,廖启征,魏世民,等. 基于共形几何代数的一种平面并联机构位置正解[J]. 北京邮电大学学报, 2010, 32(2): 7-10, 32.
NI Zhensong, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward displacement of a planar parallel mechanisms position based on conformal geometric algebra [J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010, 32(2): 7-10, 32.
- [10] 张忠海,李端玲. 一种平面并联机构位置正解分析的共形几何代数及 Sylvester 结式方法[J]. 北京理工大学学报, 2014, 34(3): 241-244.
ZHANG Zhonghai, LI Duanling. Conformal geometric algebra and Sylvester resultant method for forward displacement analysis of a planar parallel mechanism [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014, 34(3): 241-244.
- [11] 李洪波. 共形几何代数: 几何代数的新理论和计算框架[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(11): 2383-2393.
LI Hongbo. Conformal geometric algebra: a new framework for computational geometry [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(11): 2383-2393.
- [12] HESTENES D. New foundations for classical mechanics [M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002: 15-30.
- [13] PERWASS C. Geometric algebra with applications in engineering [M]. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2009: 146-163.
- [14] MERLET J P. Direct kinematics of planar parallel manipulators [C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1996: 3744-3749.

附录 A 参数 $r_1 \sim r_7$ 的符号表达式

$$r_1 = -32p_{2x}p_{5x}[p_{3y}p_{6y}(p_{2x}-2p_{3x})(p_{5x}-2p_{6x}) + (p_{3x}^2 - p_{3y}^2 - p_{2x}p_{3x})(p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x})]$$

$$r_2 = 32p_{2x}p_{5x}[p_{3y}(p_{2x}-2p_{3x})(p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x}) - p_{6y}(p_{5x}-2p_{6x})(p_{3x}^2 - p_{3y}^2 - p_{2x}p_{3x})]$$

$$r_3 = 4\{p_{2x}p_{3x}[(-p_{5x}^2 - p_{6x}^2 + p_{6y}^2 + 2p_{5x}p_{6x})q_1^2 + (p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - 2p_{5x}p_{6x})q_2^2 + (p_{5x}^2 - 2p_{5x}p_{6x})q_3^2] + 2p_{2x}p_{3x}p_{5x}(p_{6x}p_{6y}^2 + p_{5x}^2p_{6x} - 2p_{5x}p_{6y}^2 + p_{6x}^3) + p_{2x}^3p_{3x}(-p_{6x}^2 + p_{6y}^2 + 2p_{5x}p_{6x}) + p_{2x}^2p_{3x}^2(p_{5x}^2 + p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - 4p_{5x}p_{6x}) + p_{2x}^2p_{5x}(p_{5x}p_{6x}^2 + p_{5x}p_{6y}^2 - p_{6x}^3 - p_{6x}p_{6y}) + p_{5x}p_{6x}(p_{2x}^2q_3^2 + p_{3x}^2q_2^2 - p_{3y}^2q_2^2) + p_{3x}(p_{3x}p_{5x}q_1^2 - 4p_{2x}^2p_{3y}p_{6y})(p_{5x} - p_{6x}) + p_{2x}^2p_{3y}^2(p_{5x}^2 - p_{6x}^2 + p_{6y}^2) + 2p_{2x}p_{3y}p_{6y}(p_{5x} - p_{6x})(q_1^2 - q_2^2 + p_{2x}^2) + p_{3y}^2p_{5x}q_1^2(p_{6x} - p_{5x}) + [p_{2x}p_{3x}p_{5x}(p_{3x}^2 + p_{3y}^2) + 2p_{3x}p_{3y}p_{5x}p_{6y}](2p_{6x} - p_{5x}) + 2p_{3y}p_{5x}p_{6y}(p_{2x}p_{6x}^2 + p_{2x}p_{6y}^2 - p_{2x}q_3^2 - p_{3x}q_1^2 + p_{3x}q_2^2) + [p_{5x}^2(p_{3x}^2 - p_{3y}^2) + p_{2x}^2q_1^2](p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x}) + 2p_{2x}p_{3y}p_{5x}p_{6y}(p_{6x}^2 + p_{5x}^2 - 2p_{5x}p_{6x} + p_{6y}^2)\}$$

$$r_4 = 4[p_{2x}p_{3y}(p_{2x}^2 - 2p_{2x}p_{3x} - q_2^2)(p_{6y}^2 - p_{6x}^2 + 2p_{5x}p_{6x}) + 2p_{2x}^2p_{3x}p_{6y}(2p_{5x} - p_{6x}) + 2p_{2x}p_{3x}p_{6y}(p_{2x}^2 + q_1^2 - q_2^2)(p_{6x} - p_{5x}) + 2p_{3x}p_{5x}p_{6y}(p_{2x}q_3^2 - p_{2x}p_{3y}^2 + p_{2y}q_2^2) + 2p_{3x}p_{3y}p_{5x}^2(p_{6x}^2 - p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x}) + 2p_{3x}p_{3y}p_{5x}q_1^2(p_{5x} - p_{6x}) + 2p_{3x}p_{3y}p_{5x}q_1^2 + 2p_{2x}p_{5x}(p_{3x}p_{6y} - p_{3y}p_{6x})(2p_{5x}p_{6x} - p_{6y}^2 - p_{6x}^2 - p_{5x}^2) + p_{2x}^2p_{5x}p_{6y}(p_{6x}^2 + p_{6y}^2) + p_{2x}p_{6y}(p_{2x}p_{3y}^2p_{6x} - 2p_{3x}^3p_{5x} - p_{2x}p_{5x}q_3^2) + p_{5x}p_{6y}(p_{3x}^2 - p_{3y}^2)(q_1^2 - q_2^2) + p_{2x}p_{3y}p_{5x}(p_{3x}^2 - q_3^2)(2p_{6x} - p_{5x}) + p_{2x}p_{3y}q_1^2(2p_{5x}p_{6x} + p_{6y}^2 - p_{6x}^2 - p_{5x}^2) + (p_{2x}p_{3y}p_{5x} - p_{2x}^2p_{6y}q_1^2 - p_{3x}^2p_{5x}p_{6y} + p_{3y}^2p_{5x}p_{6y})(2p_{6x} - p_{5x})]$$

$$r_5 = 2[(2p_{3y}p_{5x}p_{6y}q_2^2 - p_{2x}q_1^4 + p_{3x}q_1^4)(p_{5x} - p_{6x}) + p_{2x}^3p_{3x}^2(3p_{6x} - 2p_{5x}) + p_{3x}^3p_{3y}^2(p_{6x} - 2p_{5x}) + p_{2x}^2p_{3x}^3(3p_{5x} - 2p_{6x}) + p_{2x}p_{3x}^2p_{5x}(5p_{5x}p_{6x} - 2p_{5x}^2 - 2p_{6x}^2 - 6p_{6y}^2) + p_{2x}p_{2x}^2q_1^2(-4p_{5x} + 3p_{6x}) + p_{2x}p_{3y}^2p_{5x}(7p_{5x}p_{6x} - 2p_{5x}^2 - 2p_{6y}^2 - 6p_{6x}^2) + p_{2x}p_{5x}q_3^2(2p_{6x}^2 + 2p_{6y}^2 - 3p_{5x}p_{6x}) + p_{3x}p_{5x}q_1^2(p_{5x}^2 - 4p_{5x}p_{6x} + 3p_{6x}^2 + p_{6y}^2) + p_{3x}^2p_{6x}(q_1^2 - q_3^2) + p_{3x}p_{5x}^2(p_{3y}^2 - q_3^2 + p_{3x}^2)(p_{5x} - 2p_{6x}) + p_{2x}p_{6x}q_1^2(3p_{5x}^2 + p_{6y}^2 + p_{6x}^2 - 4p_{5x}p_{6x}) + p_{2x}q_2^2(2p_{5x}p_{6y}^2 - p_{6x}^2 + 2p_{5x}p_{6x} -$$

$$p_{6x}p_{6y}^2) + p_{2x}(q_1^2q_3^2 + p_{3y}^2q_2^2)(2p_{5x} - p_{6x}) + p_{2x}^2p_{3x}(5p_{5x}p_{6x}^2 + 7p_{5x}p_{6y}^2 - 2p_{6x}^3 - 2p_{5x}^2p_{6x} - 2p_{6x}p_{6y}^2) + p_{2x}^2p_{3x}(p_{3y}^2 - q_3^2)(3p_{5x} - 2p_{6x}) - p_{2x}^2p_{3y}p_{6y}(2p_{5x}p_{6x} + 2p_{6y}^2 + 2p_{6x}^2 + 2p_{5x}^2) + p_{3x}p_{6x}(-p_{2x}^4 - q_2^4) + p_{2x}^2p_{3x}q_1^2(3p_{5x} - 4p_{6x}) + p_{3y}p_{6y}(2p_{5x}p_{6x}q_1^2 - p_{2x}^4 - q_1^4 - q_2^4 - 2p_{3x}^2p_{5x}^2 + 2p_{5x}^2q_3^2) + p_{2x}p_{2x}^2q_2^2(2p_{5x} - 3p_{6x}) + p_{2x}p_{5x}(3p_{5x}p_{6x}^3 + 3p_{5x}p_{6x}p_{6y}^2 - p_{6y}^4 - 2p_{5x}^2p_{6x}^2 - p_{6x}^4 - 2p_{5x}^2p_{6y}^2 - 2p_{6x}^2p_{6y}^2) + 2p_{2x}^2p_{3x}p_{6x}q_2^2 + p_{3x}p_{5x}^2(3p_{5x}p_{6x}^2 + p_{5x}p_{6y}^2 - 2p_{6x}p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x} - 2p_{6x}^3) + 2p_{2x}p_{3x}p_{3y}p_{5x}p_{6y}(4p_{6x} - p_{5x}) + p_{3y}p_{5x}^2p_{6y}(2p_{5x}p_{6x} - 2p_{6x}^2 - 2p_{6y}^2 - p_{5x}^2) + p_{3x}^3(p_{6x}^3 + p_{6x}p_{6y}^2 - 2p_{5x}p_{6y}^2 - 2p_{5x}p_{6x}^2) + p_{2x}p_{3y}^3(-p_{3y}p_{5x} - 2p_{2x}p_{6y}) + p_{2x}p_{3x}^2p_{5x}(2q_3^2 - p_{3x}^2) + p_{2x}p_{3y}^2(2p_{5x}q_3^2 + p_{6x}q_1^2) + p_{2x}(p_{6x}q_2^2q_3^2 - p_{6x}q_1^2q_2^2 - p_{5x}q_3^4) + p_{3x}p_{5x}(q_3^2 - p_{3y}^2)(q_2^2 - q_1^2) + 2p_{3y}p_{6y}q_1^2q_2^2 + 2p_{2x}p_{3x}p_{3y}p_{6y}(q_1^2 - q_2^2) + 2p_{2x}^2p_{3x}p_{3y}p_{6y}(p_{2x} - p_{3x}) + 2p_{2x}^2p_{3y}p_{6y}(q_2^2 + q_3^2) + p_{3x}q_1^2q_2^2(-p_{5x} + 2p_{6x}) + 2p_{3y}^2p_{5x}(-p_{2x}p_{3x}^2 - p_{3y}p_{5x}p_{6y}) + p_{3x}^3p_{5x}(q_1^2 - q_2^2)]$$

$$r_6 = 2p_{2x}p_{6y}(p_{5x}^2 + p_{2x}^2)(-p_{6x}^2 - p_{6y}^2) + 2p_{3x}p_{5x}^2p_{6y}(p_{5x}^2 - 2p_{5x}p_{6x} + 2p_{6x}^2 + 2p_{6y}^2) + 2p_{3y}(p_{3y}^2p_{5x}^2 - q_1^2q_2^2 - p_{2x}^2p_{3x}^2 - p_{2x}^2q_3^2 + p_{3x}^2p_{5x}^2)(p_{5x} - 2p_{6x}) + 4p_{3x}^3p_{5x}^2p_{6y} + 2p_{2x}q_2^2p_{6y}(p_{6x}^2 + p_{6y}^2) + 4p_{2x}^2p_{3x}p_{6y}(p_{5x}^2 + p_{6x}^2 + p_{6y}^2 - p_{5x}p_{6x}) + 4p_{3x}p_{5x}p_{6y}q_2^2(p_{6x} - p_{5x}) - 2p_{3y}p_{5x}^2q_3^2(p_{5x} - 2p_{6x}) - 4p_{3x}p_{5x}p_{6x}p_{6y}q_1^2 + 2p_{2x}p_{6y}q_1^2q_2^2 - 6p_{2x}p_{3x}^2p_{6y}(q_1^2 + p_{5x}^2 + q_2^2) - 2p_{2x}p_{3y}^2p_{6y}(q_1^2 + p_{5x}^2 + q_2^2) + 2p_{2x}p_{6y}(q_1^2q_3^2 + p_{5x}^2q_3^2 - q_2^2q_3^2) - 4p_{3x}p_{6y}q_2^2(q_1^2 + p_{2x}^2) + 4p_{2x}^3p_{3x}p_{3y}p_{6x} + 2p_{2x}^3p_{3y}p_{5x}q_1^2 - 2p_{3y}p_{5x}q_1^2q_3^2 + 2p_{2x}^2p_{3y}p_{5x}q_1^2 - 2p_{3x}^2p_{3y}p_{5x}q_2^2 + 2p_{3y}p_{5x}q_2^2q_3^2 - 2p_{2x}^3p_{6y}q_1^2 - 6p_{2x}^3p_{3x}^2p_{6y} + 2p_{3y}p_{5x}q_1^2(p_{5x}^2 - 4p_{5x}p_{6x} + p_{6y}^2 + 3p_{6x}^2) - 2p_{2x}^2p_{3y}^2p_{6x} + 2p_{2x}^2p_{6y}q_3^2 + 2p_{3y}^2p_{5x}q_1^2 - 2p_{3y}^3p_{5x}q_2^2 + 2p_{3x}p_{6y}q_1^4 + 2p_{2x}^4p_{3x}p_{6y} + 2p_{3x}p_{6y}q_2^4 - 2p_{3y}p_{6x}p_{2x}^4 - 2p_{3y}p_{6x}q_2^4 + 4p_{2x}p_{3x}p_{3y}q_1^2(p_{6x} - 2p_{5x}) + 2p_{3y}p_{5x}^2(p_{5x}p_{6y}^2 - 2p_{6x}p_{6y}^2 - p_{5x}^2p_{6x} - 2p_{6x}^3 + 3p_{5x}p_{6x}^2) + 4p_{2x}^2p_{3x}^2p_{6y} + 2p_{2x}^2p_{3y}(3p_{5x}p_{6x}^2 - 2p_{6x}^3 - 2p_{5x}^2p_{6x} + p_{5x}p_{6y}^2 - 2p_{6x}p_{6y}^2) - 2p_{2x}p_{6y}q_1^4 + 2p_{3y}p_{5x}q_2^2(2p_{5x}p_{6x} - 3p_{6x}^2 - p_{6y}^2) + 2p_{2x}p_{6y}q_1^2(4p_{5x}p_{6x} - p_{5x}^2 - p_{6x}^2 - p_{6y}^2) + 2p_{2x}^2p_{3y}^3(p_{5x} - 2p_{6x}) + 2p_{3y}q_1^4(p_{5x} - p_{6x}) + 4p_{3x}p_{5x}^2p_{6y}(p_{3y}^2 - q_3^2) + 4p_{2x}p_{3x}p_{3y}p_{6x}(p_{5x}^2 - q_2^2) + 4p_{2x}^2p_{3y}p_{6x}q_2^2 + 4p_{2x}^2p_{3x}p_{6y}(p_{3y}^2 - q_3^2 + 2q_1^2)$$

(下转第 90 页)